Documento de Trabajo

JOSÉ RUBIO IBÁÑEZ

CÁLCULO ALGEBRAICO DE LA MATRIZ N-SIMA DE UNA MATRIZ CUADRADA

UNIVERSIDAD EUROPEA-CEES
Departamento de Matemática

Documentos de Trabajo
4 / 96

UNIVERSIDAD EUROPEA DE MADRID
CEES

José Rubio Ibáñez

CÁLCULO ALGEBRAICO DE LA MATRIZ N-SIMA DE UNA MATRIZ CUADRADA

UNIVERSIDAD EUROPEA-CEES
Departamento de Matemática

Documentos de Trabajo
4 / 96

UNIVERSIDAD EUROPEA-CEES
Documentos de Trabajo 4 / 96
Cálculo algebraico de la matriz n-sima de una matriz cuadrada
Villaviciosa de Odón (Madrid), mayo de 1996

Diseño de la colección y dirección editorial: Departamento de Publicaciones e Intercambio Científico de la UEM-CEES
Diseño de cubierta: Síntesis Publicidad y Comunicación

ÍNDICE

1. Introducción	**4**
2. Polinomio característico	**4**
3. Matrices semejantes	**6**
4. Matriz diagonizable	**6**
5. Teorema de Cayley-Hamilton	**7**
6. Polinomio mínimo	**7**
7. Forma canónica de Jordan	**8**
8. Base cíclica	**9**
9. Cálculo de la raíz enésima	**9**
9.1. Matriz diagonizable	9
9.2. Matriz no diagonizable	11
10. Bibliografía	**14**
Notas del lector	**15**

CÁLCULO ALGEBRAICO DE LA MATRIZ N-SIMA DE UNA MATRIZ CUADRADA

JOSÉ RUBIO IBÁÑEZ
Universidad Europea-CEES
Departamento de Matemática

1. INTRODUCCIÓN

El teorema de Albert, que establece el modelo de cálculo de la raíz cuadrada de una matriz cuadrada, se ha tomado como base para el presente trabajo, pero, resultando demasiado laborioso, se desarrollan otros métodos que resultan bastante más simples. Se hace notar que el cuerpo de definición ha de ser necesariamente algebraicamente cerrado (por ejemplo, el cuerpo de los números complejos), para que así se cumpla el Teorema Fundamental del Álgebra. Antes de entrar en el tema, se exponen brevemente nociones básicas del álgebra matricial, que resultarán, probablemente, imprescindibles para la lectura de este artículo.

2. POLINOMIO CARACTERÍSTICO

Sea **A** la matriz de una Transformación lineal definida sobre un cuerpo **K** y $\lambda \in \mathbf{K}$, todo vector **X** tal que:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \lambda\,\mathbf{X}$$

se llama *vector propio.*

El sistema homogéneo:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\, \mathbf{X} = \mathbf{O}$$

en el que **I** y **O** representan la matriz unidad y nula respectivamente, tiene solución si, y solo si:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

El desarrollo de este determinante es un polinomio **f(λ)** de grado **n** que recibe el nombre de *polinomio característico*, y a cada una de sus raíces λ_i, llamadas *valores propios*, le corresponde un único vector propio.

Ejemplo 1.

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene:

*POLINOMIO CARACTERÍSTICO

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-1)^2 = 0$$

*VECTORES PROPIOS

Para $\lambda=5$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle (1,1,1)' \rangle$$

Para $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle (-2,1,0)', (-1,0,1)' \rangle$$

3. MATRICES SEMEJANTES

Dos matrices **A** y **B** se dicen semejantes si existe una matriz regular $|\mathbf{R}| \neq \mathbf{O}$, tal que :

$$\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{R} = \mathbf{B}$$

verificándose que:

* Dos matrices semejantes tienen los mismos valores propios.
* Si $\mathbf{Y}_i$ es el vector propio de **B** correspondiente al valor propio λ_i, entonces
  $\mathbf{X}_i = \mathbf{R}\,\mathbf{Y}_i$ es el vector propio de este último valor.

4. MATRIZ DIAGONALIZABLE

Una matriz cuadrada **D** se dice **Diagonal** si sus elementos son tales que:

$$\mathbf{d}_{ij} \begin{pmatrix} =0 \\ \neq 0 \end{pmatrix} \ \mathbf{para} \begin{pmatrix} i \neq j \\ i = j \end{pmatrix}$$

Siendo evidente que una matriz diagonal de orden **n** tiene **n** vectores linealmente independientes.

Toda matriz semejante a una matriz diagonal se dice **Diagonalizable.** Resultando que toda matriz diagonalizable de orden **n** tiene **n** vectores linealmente independientes.

Ejemplo 2.

Para la matriz del ejemplo 1 se tiene:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge R^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

luego:

$$R^{-1} A R = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la matriz **R** está formada por los vectores propios de **A**.

5. Teorema de Cayley-Hamilton

Toda matriz es un cero de su polinomio característico:

$$\mathbf{f(\lambda) = |\lambda I - A| \Rightarrow f(A) = O}$$

6. Polinomio Mínimo

Entre todos los polinomios **f(λ)** tales que **f(A) = 0**, existe un único polinomio mónico **m(λ)** llamado **Polinomio Mínimo** que divide a todos los demás y verifica que tiene los mismos factores irreducibles que el polinomio característico.

Ejemplo 3.

Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2$$
$$(A + I) \neq O \wedge (A - 5I) \neq O$$
$$(A + I) \cdot (A - 5I) = O \Rightarrow m(t) = (5 - \lambda) \cdot (\lambda + 1)$$

es el polinomio mínimo de **A**.

Una matriz **A** es diagonalizable si y solo si, su polinomio mínimo es un producto de polinomios lineales diferentes.

7. Forma canónica de Jordan

Aunque no todas las matrices son diagonalizables, sin embargo, es posible encontrar para éstas, una matriz semejante de estructura bastante simple. En particular, y para los fines de este artículo, se tiene la **Forma Canónica de Jordan.**

Si en una matriz **A** los polinomios característico y mínimo se pueden factorizar en polinomios lineales (lo que es posible, siempre que el cuerpo de definición sea algebraicamente cerrado) entonces **A** tiene una representación diagonal por cajas o bloques de Jordan, **J**, de la manera siguiente:

$$\text{si: } f(\lambda) = (\lambda - a_1)^{n1} (\lambda - a_2)^{n2} \ldots (\lambda - a_r)^{nr}$$

$$\text{y } m(\lambda) = (\lambda - a_1)^{m1} (\lambda - a_2)^{m2} \ldots (\lambda - a_r)^{mr}$$

para cada a_i las cajas J_{ij} son de la forma:

$$J_{ij} = (a_i) \quad \text{si} \quad m_i = 1 \vee J_{ij} = \begin{pmatrix} a_i & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a_i & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & a_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_i \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad m_i > 1$$

Ejemplo 4.

Sea una matriz de orden 5 cuyo polinomio mínimo es:

$$m(\lambda) = (\lambda - 3)^2$$

las posibles formas de Jordan, al tener únicamente un valor propio son:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \vee J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

dependiendo del número de vectores propios.

8. Base cíclica

Sean **A** y **X** una matriz cuadrada y un vector de orden **n** respectivamente, y **m(λ)** el polinomio mínimo de grado **p**, entonces:

$$< X, AX, A^2X, \ldots, A^{p-1}X >$$

engendran un subespacio cíclico.

9. Cálculo de la raíz enésima

Se distinguen según que la matriz sea diagonalizable o no.

9.1. Matriz diagonalizable

Sea **A** una matriz semejante a la matriz **D**, entonces existe una matriz regular **R** tal que:

$$R^{-1} A R = D \Rightarrow A = R D R^{-1}$$

Es evidente, por ser el cuerpo de definición algebráicamente cerrado, que existe una matriz diagonal **M** tal que:

$$M^n = M M \ldots M = D$$

teniéndose que:

$$\mathbf{A = R\,D\,R^{-1} = R\,M^{n}\,R^{-1} = (R\,M\,R^{-1})^{n}}$$

luego la matriz $\mathbf{R\,M\,R^{-1}}$ es la raíz n-sima de la matriz **A**.

Ejemplo 5.

Sea

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 18 & -1 \end{pmatrix}$$

·Polinomio característico:

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 0 \\ 18 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-8)(\lambda+1)=0$$

·Vectores propios:

$$*\lambda=8:\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 18 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\ <(1,2)'>$$

$$*\lambda=-1\ \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\ <(0,1)'>$$

·Matriz diagonal:

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\ \wedge\ \mathbf{R}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ \wedge\ \mathbf{M}=\sqrt[3]{\mathbf{D}}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es la solución real de las tres que tiene.

·Raíz cúbica:

$$\sqrt[3]{\mathbf{A}}=\mathbf{R}\ \ \mathbf{M}\ \ \mathbf{R}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

'Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 18 & -1 \end{pmatrix}$$

9.2. Matriz no diagonalizable

En este caso se expresan la matriz en función de la forma canónica de Jordan, es decir:

$$\mathbf{A = S\,J\,S^{-1}}$$

el problema del cálculo de la raíz n-sima de **A** de reduce al cálculo de la raíz de **J**, si:

$$\mathbf{Q^n = J}$$

entonces

$$\mathbf{A = (\,S\,Q\,S^{-1}\,)^n}$$

Para el cálculo de las raíces de **J** se procede al cálculo de las raíces de cada una de sus cajas. Como cada caja, **K**$_i$, de la matriz de Jordan tiene la forma:

$$\mathbf{K_i} = \begin{pmatrix} a_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_i \end{pmatrix}$$

el cálculo de las raíces n-simas de cada una de las cajas se reduce a resolver el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} a_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ z & y & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t & v & u & \dots & w & x \end{pmatrix}^n$$

Como cada caja está definida por un vector propio $\mathbf{e}_p$ que engendra un subespacio cíclico, su base viene dada por la siguiente expresión:

$$(A_i - \lambda I)\, e_{p-1} = e_p$$

y cada S_i por:

$$S_i = (e_p, e_{p-1}, \ldots, e_1)$$

Ejemplo 6.

Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

para calcular su raíz cuadrada se procede de la manera siguiente:

·Polinomio característico:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\,(\lambda-4)^2$$

·Vectores propios:

$$\underline{\lambda=1} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ <(0,0,1)'>$$

$$\underline{\lambda=4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ <(1,1,1)'>$$

La matriz no es diagonalizable, ya que solo hay dos vectores propios.

·Forma de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \wedge y = \frac{1}{4} \\ x = -2 \wedge y = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Una de las dos soluciones de $Q_{11}^2 = J_{11}$ es:

$$Q_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix}$$

·Base cíclica:

<u>$\lambda = 4$:</u>

$$(A_{11} - \lambda I)\; e^*_{p-1} = e^*_p \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^*_{p-1} = (2,1)'$$

$e^*_p = (1,1)'$ restricción de $e_p = (1,1,1)'$

$< (2,1,1)' , (1,1,1)' >$

<u>$\lambda = 1$:</u> $< (0,0,1)' >$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \wedge S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

·Raíz cuadrada:

$$\sqrt{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

'Comprobación

$$\left[\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 9 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right]^2 = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

10. BIBLIOGRAFÍA

P. Abellanas, *Geometría básica.*

S. Lipschutz, *Álgebra Lineal.* (SCHAUM).

Birkhoff-MacLane, *Álgebra Moderna.*

Revista Matemática Hispanoamericana (1964).

Notas del lector

Pág.	Notas

UNIVERSIDAD EUROPEA-CEES
SERIE «DOCUMENTOS DE TRABAJO»
TÍTULOS PUBLICADOS

1 / 96 I. Suárez-Zuloaga, *Small Business Acquisitions: «Starting the House from the Roof»* (Departamento de Economía de la Empresa)

2 / 96 R. García de la Sen, *Perspectiva histórica de la teoría matemática de la fiabilidad* (Departamento de Matemática)

3 / 96 S. A. López Navia, *La formación retórica del profesor: el ejercicio del compromiso comunicativo propio de la profesión docente. (Notas a la luz de la retórica clásica)* (Departamento de Filología Española)

4 / 96 J. Rubio Ibáñez, *Cálculo algebraico de la matriz n-sima de una matriz cuadrada* (Departamento de Matemática)

UNIVERSIDAD EUROPEA DE MADRID

CEES