Actividad Rectángulos: Un ejemplo de aplicación de metodologías activas en el aula universitaria de matemáticas.

Myriam Codes Valcarce[1], Modesto Sierra Vázquez[2]

[1] Facultad de Informática. Universidad Pontificia de Salamanca.

[2] Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Salamanca.

INTRODUCCIÓN

En el ámbito de la didáctica de la matemática en niveles superiores de enseñanza, Bachiller y primer curso universitario, son bien conocidos y están ampliamente documentados, los problemas conceptuales que han de resolver los estudiantes cuando se enfrentan a tópicos del cálculo infinitesimal (Tall, 1991). El principal protagonista de las dificultades que se les plantean a los estudiantes es el concepto de infinito. (Dienes, 2002), (Fischbein, 2001), (Monaghan, 2001), (Sierpinska, 1985), (Tall, 1981), (Tsamir, 2001).

La experiencia de la autora como profesora de matemáticas en el primer curso de ingeniería informática de la Universidad Pontificia de Salamanca (UPSA), advierte de la dificultad con la que los estudiantes se enfrentan al tópico de *serie numérica*. Este es el principal desencadenante para plantear una secuencia didáctica que ayude a los estudiantes a construir su conocimiento en relación con este tópico matemático.

El paso de una matemática informal e intuitiva a otra más formal, es uno de los aspectos clave en la transición de la matemática elemental a la matemática superior. En esta línea, Bagni (Bagni, 2005) sugiere que el primer contacto con las series sea más intuitivo, como el primer estado del desarrollo histórico de un concepto matemático, sin una comprensión completa del problema; posteriormente, el aprendizaje mejorará la concepción hasta un estado de maduración, como le ocurre al desarrollo histórico de los conceptos matemáticos con el paso del tiempo, (Sfard, 1991). Apoyando el punto de vista de Piaget y García, (citados en (Bagni, 2005)), según el cual "el desarrollo histórico (de un concepto) y el de un individuo son paralelos", y trasladando esta idea al diseño de una instrucción, se han definido cuatro etapas en el desarrollo histórico del concepto de serie numérica:

- *Etapa griega*: no existen como tal las series infinitas, porque no se aceptaba la idea de proceso infinito. Sin embargo, en la obra de Arquímedes se vislumbran las series infinitas en el cálculo de cuadraturas.
- *Etapa medieval*: se pierde el miedo al infinito (Boyer, 1994) y se calculan algunas sumas de series numéricas. Estos cálculos aparecían generalmente en problemas sobre cuadraturas.
- *Etapa de desarrollo*: en el siglo XVII se siguen sumando series infinitas, numéricas y de funciones, para resolver problemas de aproximación. Estamos en el despuntar del cálculo infinitesimal y el rigor en las demostraciones cede protagonismo a la intuición, permitiendo que los procesos infinitos tomen protagonismo en el cálculo de cuadraturas. Se demuestra la divergencia de algunas series, y se comienza a cuestionar el uso de series cuando estas no convergen.

- *Etapa de formalización*: en el siglo XIX Gauss y Cauchy se esfuerzan por demostrar con rigor los resultados del cálculo. En la obra de Cauchy, al igual que en la de Lacroix, se reconocen las definiciones y los teoremas de los libros de texto actuales. Hasta este momento se han dado a conocer muchas series numéricas convergentes.

Por otro lado, la inminente aplicación de la reforma del Espacio Europeo de Educación Superior, impulsa a los docentes a poner en práctica nuevas metodologías, las denominadas metodologías activas. Tradicionalmente, el proceso de enseñanza-aprendizaje estaba centrado en el papel del profesor como "instructor" y relegaba al estudiante a un papel de mero receptor de conceptos. Las nuevas metodologías, basadas en las teorías cognitivas del aprendizaje, impulsan la participación activa del estudiante en su aprendizaje promoviendo el aprendizaje por descubrimiento y trasladando el papel del profesor-instructor al de guía en el proceso de adquisición del conocimiento.

En este contexto, y con la intención de modificar paulatinamente la metodología de toda la asignatura de Fundamentos Matemáticos I de la Escuela de Informática de la UPSA, hemos diseñado una actividad para introducir el concepto de serie numérica mediante una adaptación de la metodología del aprendizaje basado en problemas (ABP), a los estudiantes de primer curso.

El ABP, "se desarrolla en base a grupos pequeños de trabajo, que aprenden de manera colaborativa en la búsqueda de resolver un problema inicial, complejo y retador, planteado por el docente, con el objetivo de desencadenar el aprendizaje autodirigido de sus alumnos" (Morales y Landa, 2004). Aunque originalmente se introdujo como metodología innovadora en la Escuela de Medicina de la Universidad de McMaster (Canadá), numerosos centros de otras instituciones han adoptado esta metodología aplicándola a estudios de distinta índole. Según Morales y Landa (Morales y Landa, 2004), las características típicas del ABP que prevalecen en las diversas adaptaciones son:

- El aprendizaje está centrado en el alumno.
- El aprendizaje se produce en grupos pequeños de alumnos.
- Los profesores son facilitadores o guías.
- Los problemas forman el foco de organización y estímulo para el aprendizaje.
- Los problemas son un vehículo para el desarrollo de habilidades de resolución de problemas clínicos. (En el caso de estudios de otra índole distinta a la medicina, los problemas son del mundo real o lo más cercano a ellos, según el contexto profesional del alumno).
- La nueva información se adquiere a través del aprendizaje autodirigido.

En nuestro caso, hemos adaptado el ABP al aprendizaje de un tópico de cálculo infinitesimal en la docencia en estudios de ingeniería. En relación a la elección del contexto del problema, nos hemos distanciado de la intencionalidad original, en cuanto a que el problema esté relacionado con la futura actividad profesional que se espera de los titulados, a cambio de reproducir el desarrollo histórico del concepto.

La decisión de elegir el tópico matemático de serie numérica para realizar esta primera experiencia, viene argumentada por la importancia de la convergencia de sucesiones y series numéricas en relación con otros tópicos propios de la matemática aplicada a la ingeniería, tales como la aproximación, los desarrollos trigonométricos y en series de potencias o las integrales impropias, por nombrar algunos. Así, en todos los temarios de primer curso de matemáticas en carreras de ciencias, y en especial en ingenierías, se encuentra el tema de la convergencia de sucesiones y series numéricas, cuyo aprendizaje está íntimamente ligado al concepto de infinito.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

La relevancia del concepto matemático y su vinculación con distintos tópicos propios del cálculo infinitesimal, como por ejemplo los límites o las funciones reales, nos llevan a plantear objetivos muy ambiciosos:

- Desarrollar el razonamiento científico, la abstracción y la intuición.
- Capacitar al alumno para modelizar matemáticamente.
- Desarrollar habilidades para interpretar representaciones gráficas y expresiones algebraicas.
- Conocer y utilizar correctamente operaciones propias del cálculo algebraico.
- Utilizar métodos específicos del cálculo infinitesimal.
- Manejar software de cálculo simbólico.
- Mostrar al alumno el potencial del cálculo infinitesimal para la resolución de muchos problemas de distinta índole.

Para conseguir estos objetivos, el alumno ha de desarrollar múltiples destrezas propias de la matemática superior. Mostramos sólo aquellas que se llevarán a cabo con la realización de la Actividad Rectángulos:

- Representar gráficamente en el plano cartesiano los términos de una sucesión numérica, en particular de una sucesión de sumas parciales.
- Inferir características del comportamiento (monotonía, acotación y convergencia) de una sucesión de sumas parciales a partir de su representación gráfica en el plano cartesiano.
- Aplicar las técnicas habituales de cálculo de límites.
- Modelizar un proceso de suma infinita con la expresión algebraica de una serie numérica.
- Aproximar la suma de una serie conociendo la exactitud de dicha aproximación.
- Implementar en un lenguaje de cálculo simbólico las operaciones básicas que se requieren para estudiar la convergencia de una serie numérica.

METODOLOGÍA

Esta actividad está planteada para que los estudiantes la resuelvan en un aula de ordenadores, en tres sesiones de cincuenta minutos. Para ello, se forman pequeños grupos, de dos o tres personas, para fomentar el trabajo colaborativo y la discusión entre iguales. Después de estas tres sesiones, se realiza una puesta en común en la que los grupos exponen los resultados a los que han llegado. El profesor modera las intervenciones y finalmente expone algunas nociones teóricas, relativas a las series numéricas, que se encuentran implícitas en la actividad.

El desarrollo de las tres primeras sesiones se lleva a cabo en un aula donde los estudiantes disponen de ordenadores con un software de cálculo simbólico, como Maple o Mathematica. Estas herramientas, se utilizan para aprovechar el potencial que ofertan en cuanto a manipulación de expresiones matemáticas y capacidad para realizar cálculos matemáticos y representaciones gráficas, además de incrementar el interés del alumno por la asignatura de matemáticas.

En las experiencias que se han llevado a cabo, los estudiantes recibieron instrucción sobre sucesiones numéricas antes de realizar esta actividad. Las claves de esa instrucción fueron:

- Definir una sucesión como una función $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
- Los distintos modos de expresar el término general.
- Algunas técnicas para estudiar del comportamiento de una sucesión (monotonía, acotación y convergencia)
- Manejo de algunos criterios de convergencia para estudiar la existencia del límite.

Una vez que se les han presentado a los estudiantes estos conocimientos básicos sobre sucesiones numéricas, y antes de plantear las sumas infinitas como el límite de un tipo especial de sucesiones, las que llamamos sucesiones de sumas parciales, se les presenta la Actividad Rectángulos. En ella, el concepto de serie emerge de un problema geométrico que permite visualizar algunas propiedades de las series como monotonía, acotación y condiciones para la convergencia; en las conjeturas se induce al alumno a la generalización y se relaciona el concepto de serie con el de aproximación. Finalmente, se introducen elementos formales de la definición de convergencia de una serie numérica.

La herramienta de cálculo simbólico

Antes de argumentar la elección de la herramienta de cálculo simbólico, es necesario justificar el porqué y el cómo de su utilización. Desde hace unos años, hemos podido comprobar como se han introducido las herramientas de cálculo símbolo en el aula de matemáticas. Estas, son las herederas de las calculadoras gráficas adaptadas a la era de la revolución tecnológica. Dependiendo del marco teórico desde donde se plantee el uso de las nuevas tecnologías, así serán las respuestas al cómo y el porqué. Analizamos, brevemente, la propuesta para la utilización de herramientas de cálculo simbólico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de dos marcos teóricos, el constructivismo y el enfoque instrumental.

El punto principal en el que discrepan, es en el valor otorgado al trabajo técnico. Bajo el enfoque instrumental, se piensa que nuestra forma de interactuar con los objetos matemáticos está determinada y expresada a través de tareas y técnicas que le dan forma y valor, y del discurso técnico y teórico circundante. Por ello, se apoya en la teoría antropológica de Chevallard, que le permite integrar la dimensión institucional y defiende el papel de las técnicas y los instrumentos como mediadores del conocimiento matemático. El enfoque constructivista, centra su atención en el aspecto cognitivo del aprendizaje y no otorga el mismo valor al trabajo técnico, que está asociado a la automatización de tareas y esto, en ocasiones, a la falta de comprensión.

Mientras que la teoría antropológica sostiene que el conocimiento avanza con la automatización de tareas y técnicas, el enfoque constructivista mira con recelo los automatismos que pueden encubrir una falta de comprensión. Desde la perspectiva constructivista, el conocimiento matemático se forja desarrollando destrezas cognitivas como la intuición, la interiorización y la abstracción.

Estos dos paradigmas, además de tener en común el interés por mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, utilizan la noción de esquema que introdujo Piaget. Desde el constructivismo, el esquema de un individuo es la 'totalidad del conocimiento que para él está conectado (consciente o inconsciente) con un tópico matemático particular' (Asiala, 1996). Resulta de organizar estructuradamente la colección de objetos, procesos y acciones que el individuo posee. Desde la instrumentalización, es 'la organización invariante de conductas para una clase de situaciones dada' (Trouche, 2004). Tiene tres funciones principales: una función pragmática (permite al agente hacer algo), una función heurística (permite al agente anticipar y planear acciones) y una función epistémica (permite al agente entender algo).

En una posición moderadora, en cuanto al uso de las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas, B. Buchberger (Buchberger, 2003) propone el principio de caja blanca/caja negra que proclama un uso comedido, dependiendo de la fase de aprendizaje en la que se encuentre el alumno, respecto al tópico matemático para el cual se utiliza el ordenador. La idea que subyace en este principio, es secundada por diversos autores que comparten la utilización del ordenador en el aula de forma controlada. Dana-Picard y Steiner (Dana-Picard, 2003), sostienen que el alumno ha de utilizar comandos de bajo nivel para fomentar la creatividad; cuando se ha superado la comprensión del concepto en cuestión, se pueden utilizar comandos de alto nivel para realizar cálculos que ya han sido interiorizados.

En general, las investigaciones en didáctica de las matemáticas y nuevas tecnologías tratan de responder a preguntas del tipo: ¿cómo utilizar las nuevas tecnologías para enseñar matemáticas?, ¿qué tópicos matemáticos se pueden enseñar en este nuevo entorno?, ¿hay que modificar el currículo, y si es así, cómo?, ¿cuáles son las actitudes de los alumnos hacia el uso de las nuevas tecnologías?,…. A pesar de que las investigaciones aportan soluciones parciales sobre ciertos tópicos concretos, estas preguntas quedan abiertas. Al margen del marco teórico sobre el que se desarrollen las investigaciones, y de las preguntas que se planteen, existen ciertas reflexiones que se repiten en muchas de ellas. Algunas de estas conclusiones comunes, referentes a la utilización de nuevas tecnologías en el aula, son:

- Sin una buena planificación, los efectos son negativos.
- No es la panacea a los problemas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
- Requieren un cambio profundo en la enseñanza.
- Existen ciertas ventajas e inconvenientes que se manifiestan en algunos entornos, en concreto con calculadoras gráficas, y con el uso de software específico en ordenadores personales.
- Existe una resistencia social e institucional al empleo de nuevas tecnologías en el aula.
- ¿Están preparados los profesores para los cambios que se avecinan al introducir nuevas tecnologías en el aula?.

- Hace más compleja la tarea del alumno y del profesor, ya que el nuevo entorno demanda un aprendizaje para su correcto manejo.
- Requiere una renovación de los recursos pedagógicos.
- Las nuevas tecnologías, junto con el trabajo cooperativo, mejoran el aprendizaje.

Heid (Heid, 2003) afirma que 'la tecnología puede afectar al aprendizaje de los alumnos, a la interacción profesor-alumno, al acceso de los alumnos a las ideas matemáticas y a la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas'. Esto es suficiente para justificar tantos esfuerzos destinados a esclarecer esta temática.

En nuestra opinión, la herramienta informática tiene la función de asistir al alumno en los cálculos, servir de soporte para la visualización a través de las representaciones gráficas en el plano cartesiano y además, ofrecer un entorno de programación sencillo con el que el alumno puede crearse pequeñas rutinas. En general, de la herramienta informática esperamos que:

- Proporcione un entorno que atraiga a los alumnos.
- A pesar de las dificultades intrínsecas del uso de una herramienta informática, debido en parte al desconocimiento de la sintaxis propia de cada software, esto no sea un nuevo obstáculo difícil de superar.
- Favorezca la visualización y la interpretación de las representaciones gráficas y geométricas, proporcionando las condiciones necesarias para que el alumno maneje distintos registros: analítico, geométrico y gráfico.
- Contribuya a la experimentación y libere al alumno de tediosos cálculos y de los errores asociados a ellos.
- Introduzca un entorno de trabajo actual y contribuya a que sea familiar para el alumno, ya que vivimos en una sociedad en la que los ordenadores forman parte de nuestro entorno diario.

Tanto Maple (Waterloo) como Mathematica (Wolfram Research), los programas de cálculo simbólico más utilizados en los departamentos de matemáticas de las universidades españolas, cumplen las propiedades necesarias para implementar estos requisitos. La elección de Maple frente a Mathematica, no tiene que ver con su potencial, sino con la disponibilidad del software en la UPSA. El manejo de los dos es similar y la sintaxis es bastante intuitiva.

En ocasiones es inevitable que el alumno se sienta incomodo por un software novedoso y que aparezcan ciertas dificultades (inherentes a este entorno) que se han puesto de manifiesto en algunas investigaciones, como la correcta interpretación de los resultados que se obtienen en la pantalla del ordenador y la adaptación al entorno para saber qué tienen que ordenar al programa para que realice aquello que esperan.

Balderas (Balderas, 1999), muestra la clasificación de Zhao de siete tipos distintos de productos directos de software matemático (los productos indirectos, son aquellos entornos, como los editores de fórmulas o las páginas de internet de contenido matemático, que se utilizan en la actividad matemática, pero no resuelven problemas matemáticos). A su vez, distingue entre aquellos específicos para la educación matemática y los que no tienen ningún propósito didáctico. Maple se encuentra en este último grupo de programas, en los que es esencial el papel del profesor para establecer una estrategia didáctica que guíe la instrucción.

El uso del ordenador, no va a sustituir la clase tradicional de cálculo si no que va a servir de ayuda para cambiarla por otra en la que se preste más atención a aspectos como el enfoque geométrico y gráfico, o estimular el trabajo intuitivo del alumno e introducirle en el quehacer matemático: observar, experimentar, conjeturar y probar.

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

Ya comentamos anteriormente, que hemos sacrificado la elección de un problema relacionado con la actividad profesional que se espera de un titulado en ingeniería informática, a cambio de trabajar con otro que nos permita seguir un camino paralelo al desarrollo histórico del tópico serie numérica.

La actividad consta de nueve apartados en los que va creciendo el nivel de abstracción y en los que se van introduciendo diversos aspectos relacionados con las series numéricas. En el anexo, hemos incluido el enunciado completo de la Actividad Rectángulos, tal y como la conocen los alumnos. A continuación, detallamos su contenido:

La actividad comienza con el cálculo del área de un rectángulo. Con este contexto, vinculamos el nacimiento de un tópico de cálculo infinitesimal con un problema geométrico, retrocediendo en el tiempo hasta la época de la matemática griega. Recordemos que, a pesar de que algunos consideran a Arquímedes como el padre del cálculo infinitesimal, Edwards (Edwards, 1979) manifiesta la carencia en esta época, de las técnicas propias del cálculo infinitesimal, entre otras, un algoritmo para calcular áreas y volúmenes o el reconocimiento de la relación existente entre los problemas de áreas y los de tangentes. A pesar de ello, los trabajos de Arquímedes sembraron la semilla que hizo germinar el cálculo en el siglo XVII de manos de Newton y Leibniz.

En el siguiente apartado, E*nfoque geométrico*, el alumno tiene ocasión de visualizar el resultado de iterar una suma de términos de una sucesión. Para Garbin (Garbin, 2000), la intuición natural es la de infinito potencial, por lo que esta secuencia de dibujos supone un primer paso hacia la abstracción que requiere el desarrollo de una concepción de *infinito actual*. Esta concepción es necesaria para entender la noción de serie numérica como el límite de una sucesión de sumas parciales.

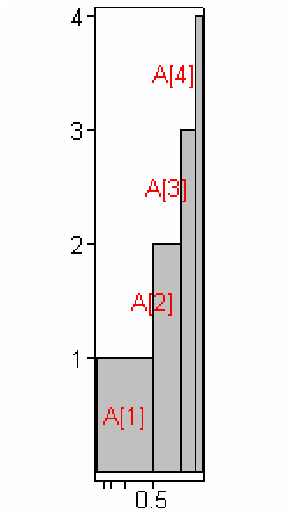
Tras el énfasis en la visualización y en desarrollar la intuición a través de la geometría, la sección *Calcula* introduce la manipulación algebraica junto con las representaciones geométricas para el cálculo del área de los rectángulos.

Siguiendo el desarrollo histórico del concepto de serie numérica, en el apartado de *Enfoque gráfico*, situamos al alumno en la edad media, no porque empiece a sumar alguna suma infinita, sino por el potencial que ofrecen las representaciones en el plano cartesiano como instrumento gráfico. En 1350, Nicolás Oresme publica su ‘Tratado sobre la configuración de cantidades y movimientos’ en el que introduce por primera vez[1] la ‘configuración geométrica de intensidades de cualidades’, su ‘latitud de las formas’ que encarna nuestras actuales representaciones gráficas. Mediante su método

[1] Aunque esta no es la primera representación gráfica que se conoce, se le atribuye a Oresme su primacía por ser la suya más clara e influyente, según cita Boyer. De hecho, es posible que este trabajo influenciara en la obra de Descartes.

gráfico de representación de las 'variaciones de la intensidad de una cantidad', facilitó un procedimiento gráfico para sumar una serie. Por ejemplo, la suma de la serie de $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots$, se puede obtener de manera más sencilla de como lo hizo Swineshead gracias a la representación gráfica. La prueba geométrica de la suma de esta serie es la siguiente:

> Considerando como antes la gráfica velocidad/tiempo, el espacio recorrido en cada intervalo es el área del rectángulo de base el intervalo de tiempo y altura la velocidad en ese intervalo, es decir, A[n]. Como por la regla de Merton, la distancia total recorrida es igual a la distancia recorrida con una velocidad constante igual a la que lleva en la mitad en la mitad del intervalo de tiempo, se tiene:



$$\sum_{n=1}^{\infty} A[n] = 1\cdot 2$$

Como $A[n]=\frac{n}{2^n}$, se tiene

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots = 2$$

Con este método, sumó otras series, como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot n}{4^n}=\frac{4}{3}$.

Oresme, también obtuvo en su tratado de 1350 una fórmula general para la suma de series geométricas escrita como sigue:

> *Si a una cantidad a se le quita una k-ésima parte, y a lo que resta se le quita otra k-ésima parte, y así hasta infinito, tal cantidad será extinguida, ni más ni menos, por ese modo de sustracción.*

Es decir, $\frac{a}{k}+\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n}+\cdots = a$

En sus demostraciones, Oresme recurre a las representaciones de gráficas, dotando a su discurso de una fuerte componente geométrica. Hoy en día se ha perdido este vínculo entre la representación geométrica y el cálculo. (Boyer, 1959)

Por tanto, este apartado sugiere el empleo de la herramienta informática para realizar las representaciones gráficas. Para ello, el alumno ha de ser capaz de obtener la expresión general de la sucesión de sumas parciales, con lo que, implícitamente, está relacionando el concepto de límite de una sucesión de sumas parciales con el de suma infinita.

El apartado *Reflexiona*, invita a meditar sobre el resultado de las experiencias de los apartados anteriores, a la vez que se verbaliza, por primera vez, el comportamiento de una suma infinita. Con esto, finaliza la parte más intuitiva de la actividad; nos situamos en la transición entre la edad media y la etapa de desarrollo.

La sección *Experimenta*, como bien dice la palabra, ofrece al alumno un espacio donde, apoyándose en la instrucción de Maple para sumar sumas infinitas, realizará sumas geométricas con distintos valores de la razón. Estas sumas, han de servir de base para realizar conjeturas relativas a las series en general, y de la convergencia de la serie geométrica, en particular. Continuando con la analogía entre el desarrollo histórico del tópico serie numérica y las secciones de la Actividad Rectángulos, nos situamos en la etapa de desarrollo, en la que se suman series sin formalizar aún las cuestiones relativas a la divergencia de algunas de ellas. Las cuatro experiencias abordan dos cuestiones esenciales para el estudio de las series numéricas: la efecto del término general de la sucesión de términos que se suman, y el significado de un término de la sucesión de sumas parciales para aproximar el valor de la suma de la serie.

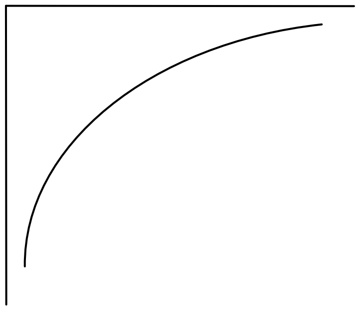
Como transición entre la etapa de desarrollo y la etapa de formalización, en la sección *Conjetura*, se pide al alumno que conjeture acerca de tres cuestiones: la convergencia de la serie geométrica, el uso de unos cuantos términos de una suma infinita para aproximar el valor de dicha suma, y el significado del límite de una sucesión, vinculado con la suma de una serie.

Para finalizar, en el apartado *Resultados*, se ofrece al alumno una justificación de la convergencia de la serie geométrica utilizando la fórmula utilizada por Euclides, para sumar una cantidad dada de términos de una progresión geométrica.

No hemos podido llevar a cabo la experiencia siguiendo al pie de la letra la metodología que proponemos por cuestiones infraestructura y disponibilidad de aulas. Esperamos que, en un futuro próximo, se salven estas barreras.

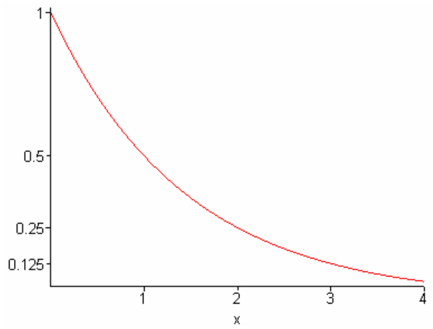
RESULTADOS

La metodología empleada ha sido, en general, bien aceptada por parte de los alumnos. Por un lado, trabajar las matemáticas desde el aula de ordenadores, aporta un entorno tecnológico con el que están muy familiarizados. A pesar de ello, la utilización de un software matemático, siempre introduce cierto grado de expectación hasta que el alumno se familiariza con la sintaxis. Después, añoran su potencia cuando están en el aula habitual y no pueden recurrir al ordenador para que les resuelva un cálculo o para comprobar que han obtenido el resultado deseado. Una de las mayores aportaciones que hemos logrado con la utilización del software de cálculo simbólico, ha sido lo enriquecedoras que resultan las representaciones gráficas, frente al habitual tratamiento analítico de los temas de cálculo. El entorno computacional, les ofrece la posibilidad de obtener gráficas con muy poco esfuerzo, por lo que las utilizan tanto como argumento sobre el que se apoyan para justificar resultados, como para explorar una respuesta. En una entrevista personal con uno de los alumnos, se le pedía dar un ejemplo de una sucesión monótona creciente y acotada. Éste, dibujó algo así:



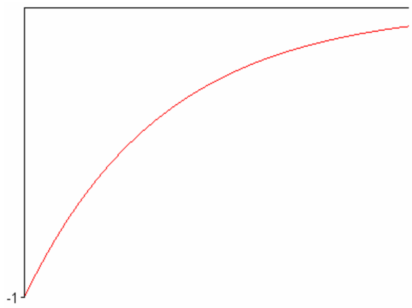
Y respondió $-\frac{1}{n}$. Reflexionar primero sobre la gráfica, antes que hacerlo analíticamente, le permitió superar el obstáculo que suponen los números negativos. (Cornu, 1991). (También se le pedía dar otros ejemplos de sucesiones, y en todos utilizó expresiones de términos positivos). Otro alumno, ante la misma pregunta y tras haber dado como ejemplo de sucesión convergente

$\frac{1}{2^n}$



Respondió a la pregunta

$-\frac{1}{2^n}$



El observar la simetría de las gráficas de las funciones $f(x)=\frac{1}{2^x}$ y $f(x)=-\frac{1}{2^x}$ facilitó al alumno encontrar la expresión analítica que buscaba.

Por otro lado, el aprendizaje por descubrimiento añade otro factor de motivación en el alumno. La realización de actividades no convencionales les atrae más hacia las clases de matemáticas, que la tradicional clase magistral. Aún así, hubo quien se quejó por tener que esforzarse en trabajar en las clases presenciales. Esta queja, pone de manifiesto la resistencia por parte de algunos alumnos al cambio de metodología.

CONCLUSIONES

Como afirman Weller, y otros (Weller, 2004), "ayudar a los estudiantes a formular concepciones objeto de los conceptos matemáticos, requiere el desarrollo e implementación de instrucciones diseñadas cuidadosamente". Debemos, por tanto, dedicar esfuerzos a plantear instrucciones que faciliten el camino del conocimiento para conseguir, no solo buenos profesionales, sino buenos conocedores del saber.

Nuestra propuesta, trata de conjugar la reproducción, discreta, del desarrollo histórico del concepto y el uso de las nuevas tecnologías en el aula, para transmitir un concepto complejo de la matemática superior. El diseño de la instrucción bajo una metodología de aprendizaje basado en problemas nos permite, además, adaptar la enseñanza-aprendizaje al nuevo marco Europeo de Educación Superior.

La experiencia positiva que hemos llevado a cabo, nos anima a seguir dedicando esfuerzos para lograr el diseño e implementación de actividades similares centradas en otros tópicos matemáticos.

Además, consideramos que esta actividad se puede adaptar a otros niveles no universitarios para introducir a los alumnos en el pensamiento matemático avanzado.

No nos ha sido posible completar el ciclo de la instrucción porque no hemos llevado a cabo una evaluación acorde con la metodología que hemos empleado. Debido a que con esta actividad abordamos sólo a una pequeña parte del temario, creímos conveniente continuar con la evaluación tradicional. Para ampliar la propuesta, estableceremos una evaluación combinando técnicas del aprendizaje activo, como el portafolios, con pruebas objetivas.

Esta actividad la planteamos como un primer impulso hacia el cambio metodológico; los resultados satisfactorios de la aplicación del ABP, nos animan a extenderlo a otros tópicos propios de una matemática de primer curso de ingeniería.

BIBLIOGRAFÍA

Asiala, M.; Brown, A.; Devries, D.J. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education, en Jim Kaput, Alan H. Schoenfeld, Ed Dubinsky (ed.). *Research in Collegiate Mathematics Education II, Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Issues in Mathematics Education.* 6, 1-32.

Bagni, G.T. (2005). Infinite series from history to mathematics education. International Journal for Mathematics Teaching and Learning.

Balderas, A., (1999). The influence of information technology in the daily work of mathematics teachers. *International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Societal Challenges, Issues and Approaches*. El Cairo, Egypt.

Boyer, C. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover

Boyer, C. (1994). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza

Buchberger, B. (2003). The White-Box and Black-Box. Usage of Mathematical Software Systems. *Simposio "Matemáticas y nuevas tecnologías: ¿qué aprender, cómo enseñar?*. Universidad Complutense de Madrid, Fundación Ramón Areces.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer. 153-166

Dana-Picard, T.; Steiner, J. (2003). Enhancing conceptual insight using a CAS. Disponible en la página web: http://www.lonklab.ac.uk/came/events/reims/3-ShortPres-DanaPicard.pdf

Dienes, Z. P. (2002). How to make 'infinity' intelligible. *The New Zealand Mathematics Magazine*. 39 (2), 50-55.

Edwards, C.H. (1979). *The historical development of the calculus*. New York: Springer

Euclides. *Elementos*. Edición en castellano de María Luisa Puertas Castaño. (2000) Madrid: Gredos

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*. 48, 309-329.

Garbin, S. (2000). Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Heid, M.K., 2003. Research on technology and the teaching and learning of mathematics. *International Conference on Research and Development in Mathematics and Science Education*. Disponible en la página web: http://clnet.org/archive/dfgnsf/docs/KielUSPlenaryPapers.pdf.

Monaghan, J. (2001). Young people' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics*. 48, 239-257.

Morales, P.; Landa, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. *Theoria*. 13, 145-157.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 1-36.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 6 (1), 5-67

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D.; Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*. 12, 151-169.

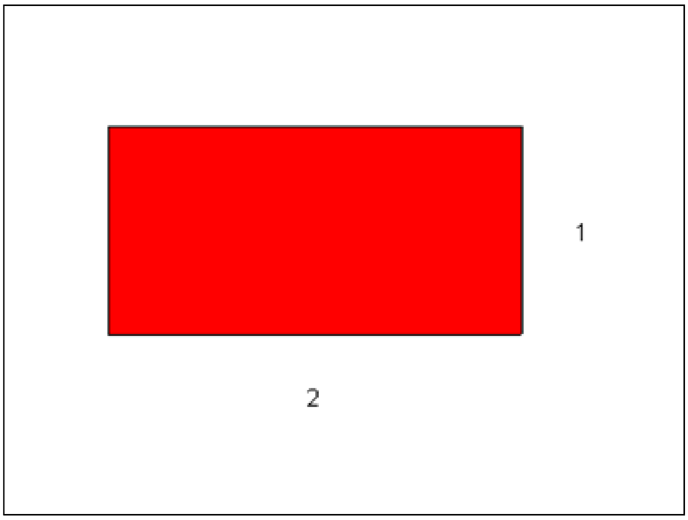
Trouche, L., (2004). Environnements informatisés et mathématiques : quels usages pour quels apprentissages?. *Educational Studies in Mathematics*. 55, 181-197.

Tsamir, P. (2001). When the same' is not perceived as such: the case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics*. 48, 289-307.

Weller, K.; Brown, A.; Dubinsky, E.; McDonald, M.; Stenger, C. (2004) Intimations of infinity. Notices of the American Mathematical Society 51 (7), 741-750

Actividad rectángulos

Calcula el área de la siguiente figura:

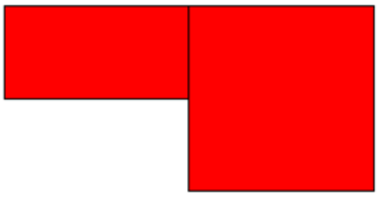
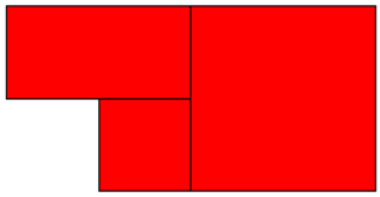


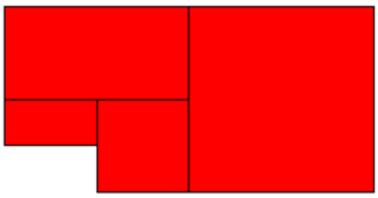
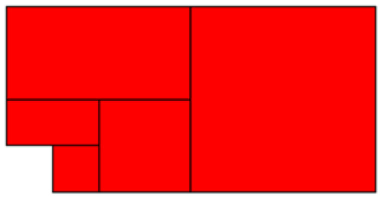
Dibujo 1

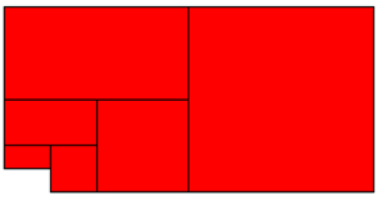
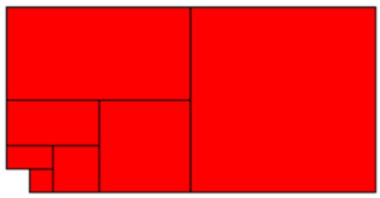
Área =

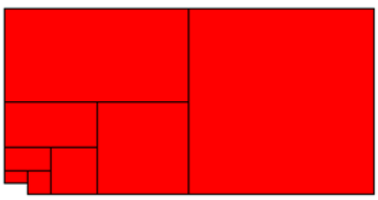
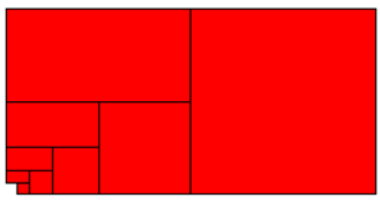
Enfoque geométrico

Observa cómo se generan nuevos rectángulos a partir de un cuadrado de lado 1.

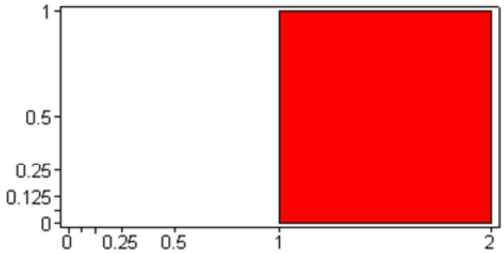



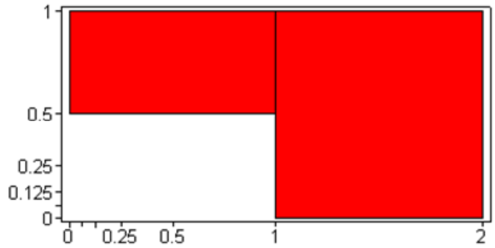
Calcula

Calcula el área de la figura coloreada y de cada nuevo rectángulo que se añade:



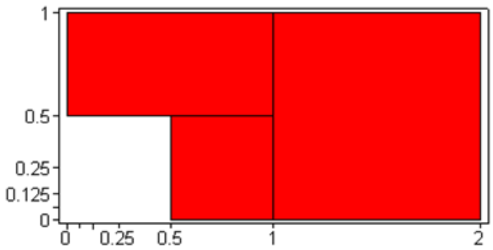
Área coloreada = 1

Área nuevo rectángulo = 1



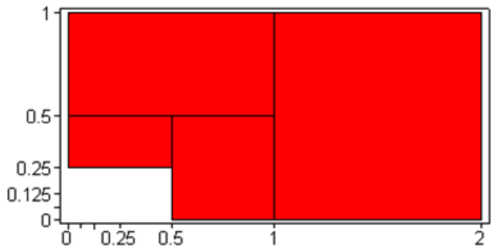
Área coloreada = 1+1/2 = 3/2

Área nuevo rectángulo = 1/2



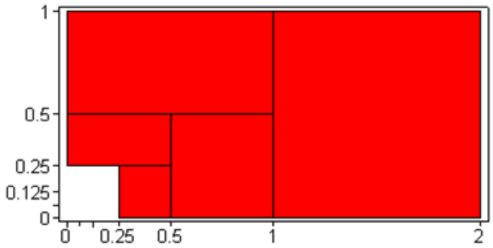
Área coloreada =

Área nuevo rectángulo =



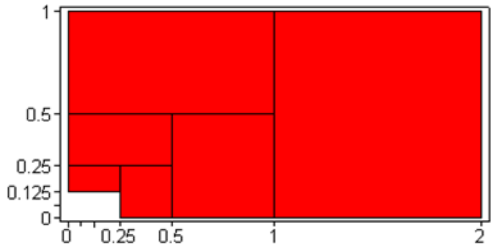
Área coloreada =

Área nuevo rectángulo =



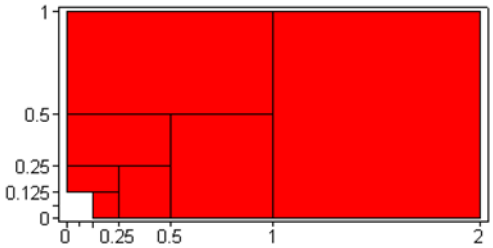
Área coloreada =

Área nuevo rectángulo =



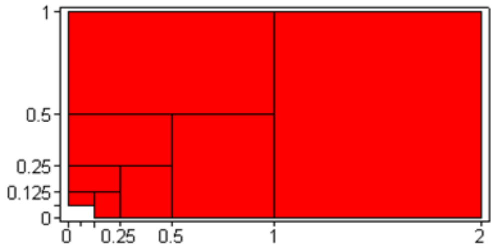
Área coloreada =

Área nuevo rectángulo =



Área coloreada =

Área nuevo rectángulo =



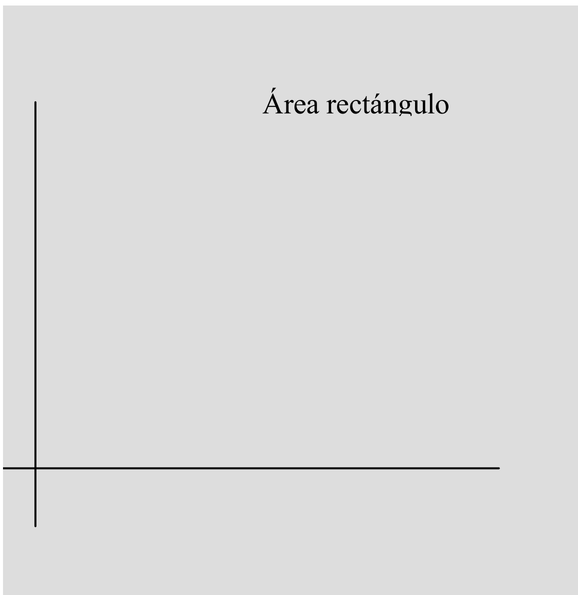
Área coloreada =

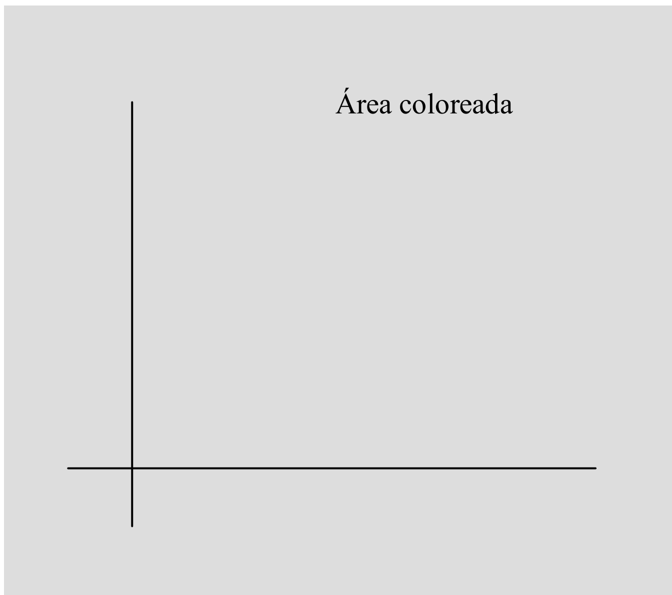
Área nuevo rectángulo =

Enfoque gráfico

Dibuja en el plano cartesiano los valores de las sucesivas áreas, tanto de cada rectángulo como de toda la figura coloreada. Ayúdate de una tabla de valores como la que tienes a continuación:

n	**área rectángulo**	**área coloreada**	**valor aproximado del área coloreada**
0	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1.5
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$	1.75
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{15}{8}$	1.875
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{31}{16}$	1.9375
5	$\frac{1}{32}$	$\frac{63}{32}$	1.96875





Reflexiona

¿Cuánto vale la suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$?

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=$

Acabas de comprobar que una suma de infinitos sumandos puede estar acotada y por tanto tener un valor finito.

Los términos $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$,... forman una progresión geométrica porque para obtener un término a partir del anterior hay que multiplicar por una cantidad constante llamada razón. Normalmente llamaremos a este valor r. En este proceso de construcción de rectángulos, la razón es $r=\frac{1}{2}$. En el apartado **Resultados** tienes más información a cerca de las progresiones geométricas.

Experimenta

experiencia 1

Comprueba cuánto vale la suma $1+r+r^2+r^3+\cdots$ para otros valores de r, por ejemplo, $r=\frac{1}{3}$, $r=\frac{1}{4}$. Ayúdate del comando sum de Maple.

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{3^r}=$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{4^r}=$$

experiencia 2

Prueba ahora con otros valores de r, por ejemplo $r=1$, $r=2$.

$$1+1+1^2+1^3+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}1^r=$$

$$1+2+2^2+2^3+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}2^r=$$

Como puedes comprobar, los sumandos son cada vez mayores. r^n no está acotado si $|r|>1$.

experiencia 3

¿Qué ocurre si $r<0$? Prueba con $r=-1$, $r=-2$, $r=-\frac{1}{2}$.

$$1-1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r=$$

$$1-2+(-2)^2+(-2)^3+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}(-2)^r=$$

$$1-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^r=$$

$\sum_n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ es un ejemplo de una serie alternada que converge. $\sum_n(-2)^n$, $\sum_n(-1)^n$ son ejemplos de series alternadas que no convergen.

experiencia 4

Suma sólo una cantidad finita de términos de la progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$. Por ejemplo 10 sumandos. Ayúdate del comando sum de Maple y utiliza el comando evalf para aproximar con 15 decimales.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^9}=\sum_{r=0}^{9}\frac{1}{2^r}=$$

Ahora suma más términos, por ejemplo 20.

$$\sum_{r=0}^{19}\frac{1}{2^r}=$$

Conjetura

conjetura 1

¿Para qué valores de r la suma $\sum_{n} r^{n}$ es finita? En esos casos, ¿cuál es su valor?

conjetura 2

¿Cuántos rectángulos se necesitan generar para que la suma de sus áreas sea al menos 1.999 u^2?

conjetura 3

¿Cuál es la diferencia entre el área de la figura 1 y el área de la figura coloreada, resultante de iterar el proceso 7 veces? ¿Y 10 veces? ¿A qué valor se acerca la diferencia entre el área total y el área de los cuadrados generados tras n iteraciones?

Demuestra

prueba de la conjetura 1

Demuestra analíticamente tu conjetura 1. Utiliza la fórmula de la suma de n términos de una progresión geométrica para deducir la convergencia de $\sum_{n} r^{n}$.

prueba de la conjetura 2

Demuestra analíticamente tu conjetura 2. Recuerda la fórmula para la suma de n términos de una progresión geométrica y algunas propiedades de logaritmos.

prueba de la conjetura 3

Demuestra analíticamente tu conjetura 3.

Resultados

Suma de una progresión geométrica

Dada una progresión geométrica de razón r, es decir, $a, a\cdot r, a\cdot r^2, a\cdot r^3, a\cdot r^4, \cdots$, la suma de los n+1 primeros términos es

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a\cdot r^i = a + a\cdot r + a\cdot r^2 + a\cdot r^3 + \cdots + a\cdot r^n = a + r\cdot\left(a + a\cdot r + a\cdot r^2 + a\cdot r^3 + \cdots + a\cdot r^{n-1}\right) = a + r\cdot S_{n-}$$

Por tanto, $S_n = a + r\cdot S_{n-1}$ y como

$$S_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a\cdot r^i = a + a\cdot r + a\cdot r^2 + a\cdot r^3 + \cdots + a\cdot r^{n-1} = \sum_{i=0}^{n}\left(a\cdot r^i\right) - a\cdot r^n = S_n - a\cdot r^n$$

se tiene $S_n = a + r\cdot\left(S_n - a\cdot r^n\right)$. Despejando S_n de esta expresión, resulta, $S_n = \dfrac{a - a\cdot r^{n+1}}{1-r} = a\cdot\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} = a\cdot\left(\dfrac{1}{1-r} - \dfrac{r^{n+1}}{1-r}\right)$.

Si se suman infinitos términos de una progresión geométrica, el valor de esta suma dependerá del primer término, a, y de la razón, r: $\lim S_n = \lim \dfrac{a - a\cdot r^{n+1}}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}\cdot \lim\left(1 - r^{n+1}\right)$

Si $r = 1$, $S_n = n\cdot a$ y $\lim S_n = \lim n\cdot a = \infty$

Si $r = -1$, $\lim S_n = \dfrac{a}{2}\cdot\lim\left(1 - (-1)^{n+1}\right)$ no existe porque oscila

Si $|r| < 1$, es decir, $-1 < r < 1$, éste límite converge porque $\lim\left(1 - r^{n+1}\right) = 1$, por tanto $\lim S_n = \dfrac{a}{1-r}$

Si $|r| > 1$, es decir, $r > 1$ ó $r < -1$, el límite no existe porque $\lim\left(1 - r^{n+1}\right) = \infty$

Por tanto, la suma de infinitos términos de una progresión geométrica es finita sólo cuando la razón pertenezca al intervalo $(-1,1)$. En ese caso la suma vale $\dfrac{a}{1-r}$. En cualquier otro caso, la suma no existe.